

O Potencial Elétrico



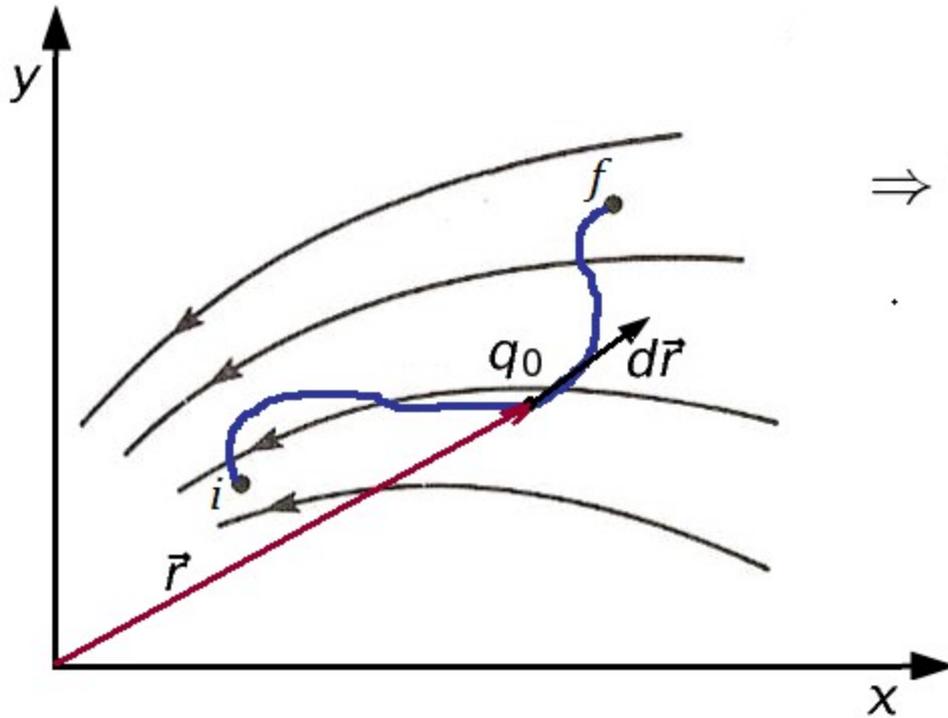
Prof. Fábio de Oliveira Borges

Curso de Física II

Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense
Niterói, Rio de Janeiro, Brasil

<http://cursos.if.uff.br/fisica2-2015/>

Energia Potencial Eletrostática



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow W_{if} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta K = -\Delta U$$

se F é conservativa

$\Delta U \rightarrow$ diferença de energia potencial

$$\Rightarrow \Delta U = -W_{if} = W_{ext}$$

A energia potencial é a quantidade de trabalho necessário para mover uma partícula de um ponto de referência a um ponto específico contra o campo. Por definição o trabalho é realizado contra o campo.



Energia Potencial Eletrostática

⇒ A energia potencial é definida somente para forças conservativas.

Se F é conservativa → **a integral é independente do percurso**

⇒ A força eletrostática é conservativa

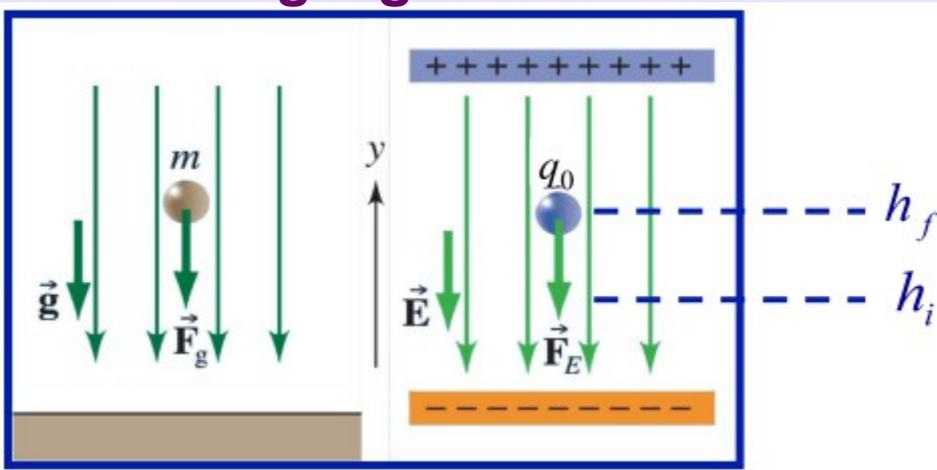


Então podemos representa-la por uma energia potencial



Energia Potencial Eletrostática

Analogia gravitacional



$$\Delta U = - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$U_f - U_i = - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Campo gravitacional

$$U_f - U_i = - \int_i^f m\vec{g} \cdot d\vec{l}$$

$$U_f - U_i = mg \int_i^f dl$$

$$U_f - U_i = mg(h_f - h_i) = mgh$$

Campo elétrico

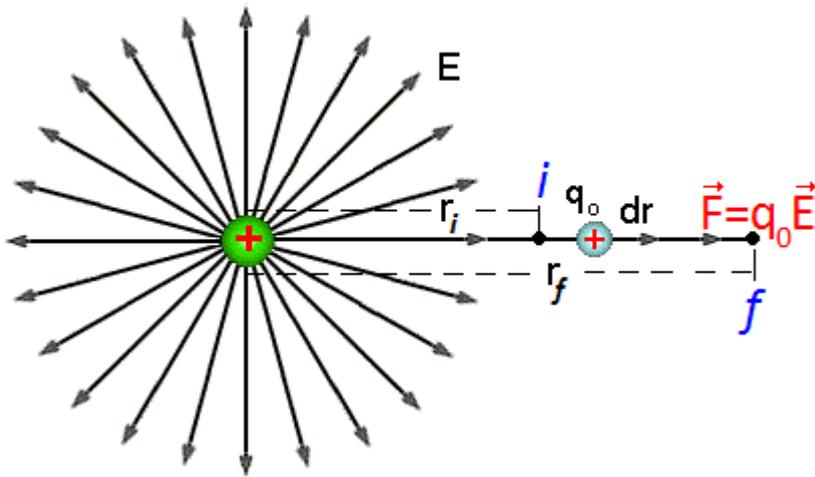
$$U_f - U_i = - \int_i^f q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$U_f - U_i = q_0 E \int_i^f dl$$

$$U_f - U_i = q_0 E(h_f - h_i) = q_0 E h$$



Energia Potencial de cargas puntiformes



$$\Delta U = -q_0 \int_{r_i}^{r_f} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta U = -q_0 \int_{r_i}^{r_f} E_r dr$$

como $E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$, então:

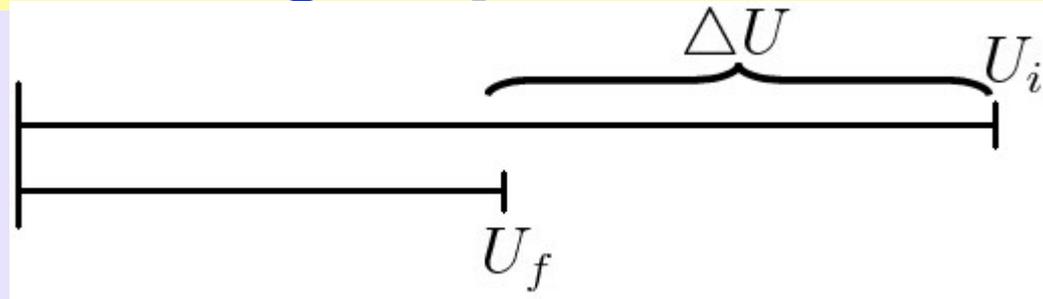
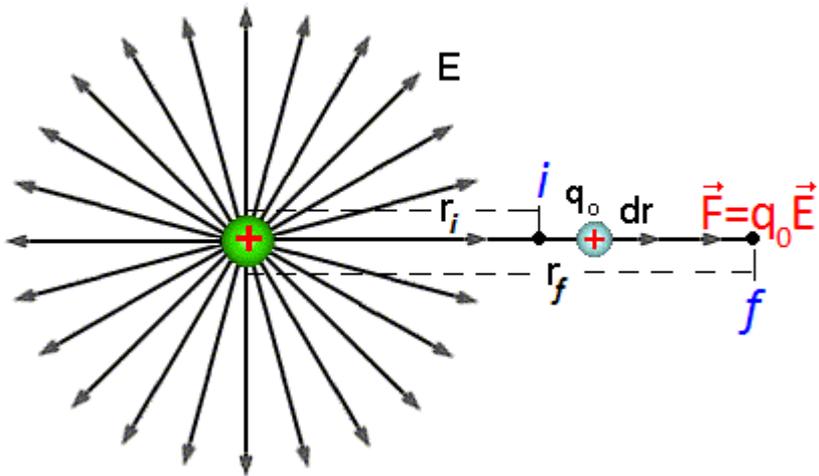
$$\Delta U = -\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_i}^{r_f} \Rightarrow \Delta U = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

$$\Delta U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r_f} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r_i} = U_f - U_i$$

$$U_f + C^{te} - (U_i + C^{te}) = U_f - U_i$$



Energia Potencial de cargas puntiformes



$$U_f + C^{te} - (U_i + C^{te}) = U_f - U_i$$

Podemos escolher (definir) um ponto de referência i de modo que r_i corresponda a uma separação infinita entre as partículas.

$$\Rightarrow U_i = 0$$

$$\Rightarrow U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r}$$

Ou seja, $U(r)$ é o negativo do trabalho realizado pela força do campo elétrico sobre a partícula com carga para trazê-la desde o infinito até r .
(Unidade no SI: $1\text{J} = 1\text{N}\cdot\text{m}$)



Energia potencial de um sistema de cargas

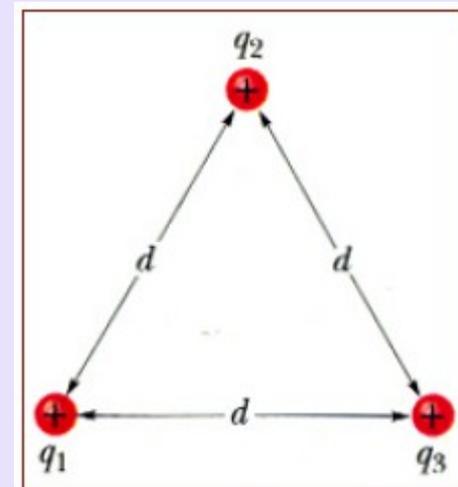
A energia potencial elétrica de um sistema de cargas pontuais fixas é igual ao trabalho necessário para um agente externo reunir o sistema, trazendo cada carga para sua posição, a partir de uma distância infinita.

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

↳ Princípio da superposição

⇒ A energia potencial é uma propriedade do sistema de cargas, e não de alguma carga individual.



$$U = \frac{q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 d}$$

$$q_1 = q_2 = q_3$$

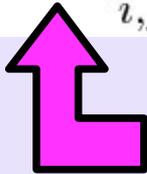
$$U = \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$



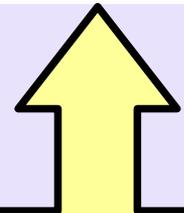
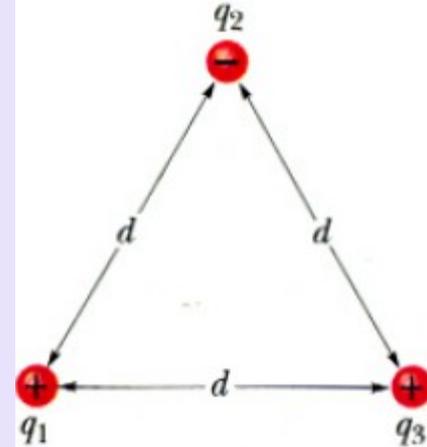
Energia potencial de um sistema de cargas

U é o trabalho executado por um agente externo para trazer todas as cargas do infinito até a configuração desejada. Dada a energia potencial elétrica entre cada par de cargas $U_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$, temos que:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$



A energia é contada duas vezes por par de carga: $U_{ij} = U_{ji}$



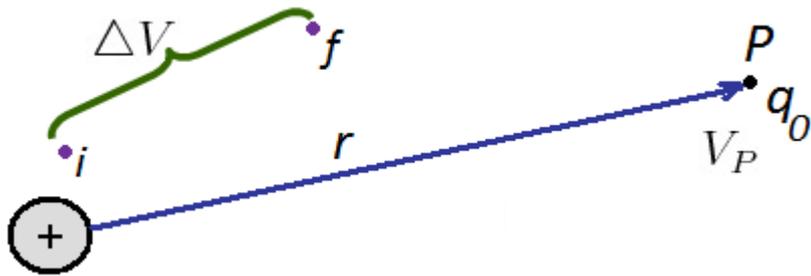
$$\begin{aligned} q_1 &= q \\ q_2 &= -4q \\ q_3 &= 2q \\ W &= \frac{-10q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \end{aligned}$$

Se $U > 0$: **cargas livres** (trabalho realizado para uni-las)

Se $U < 0$: **cargas ligadas** (trabalho realizado para separá-las)



Potencial elétrico



A variação do potencial elétrico (ddp) é a energia potencial por unidade de carga necessária para levar uma carga de prova q_0 de um ponto inicial i até um ponto final f .

O potencial elétrico independe da carga de prova q_0 .



$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{U_f - U_i}{q_0}$$

$$\Rightarrow \Delta U = q_0 \Delta V$$

Definição de potencial elétrico: é o trabalho por unidade de carga necessário para trazer uma carga de prova q_0 do infinito até um ponto P qualquer.

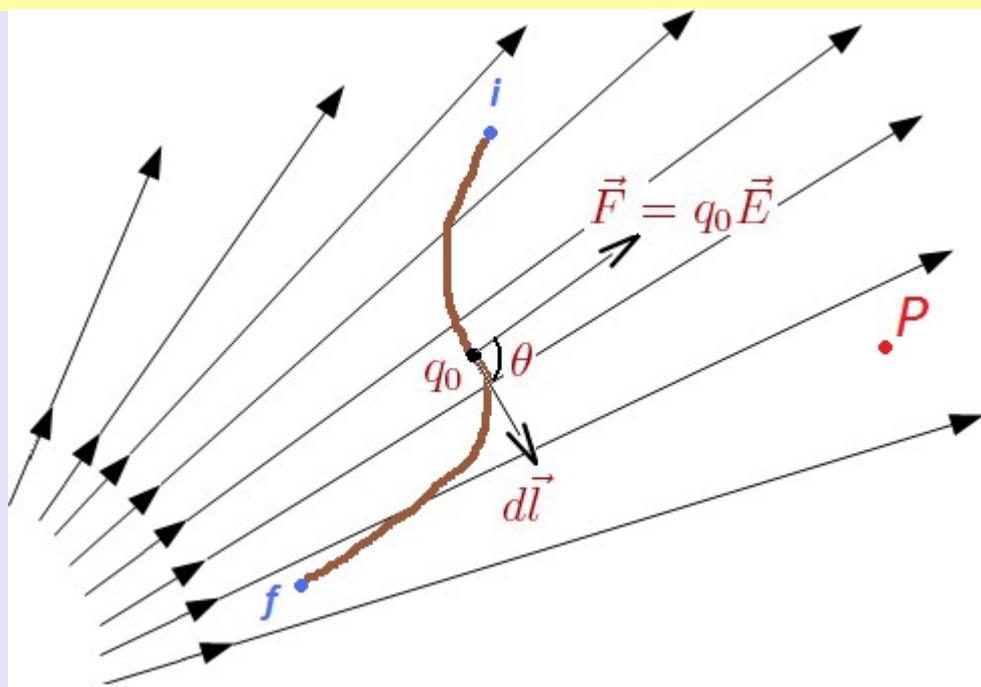
$$V_P = \frac{W_{P\infty}}{q_0} = \frac{U_P}{q_0}$$

$$\Rightarrow U = q_0 V$$

Unidade no SI: 1 volt = 1 Joule/1 coulomb



Potencial elétrico



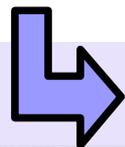
$$W_{if} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{\Delta U}{q_0} = -\frac{W_{if}}{q_0}$$

$$\Rightarrow V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

referenciando o ponto inicial no infinito ($i \rightarrow \infty$) $\Rightarrow V_i = 0$

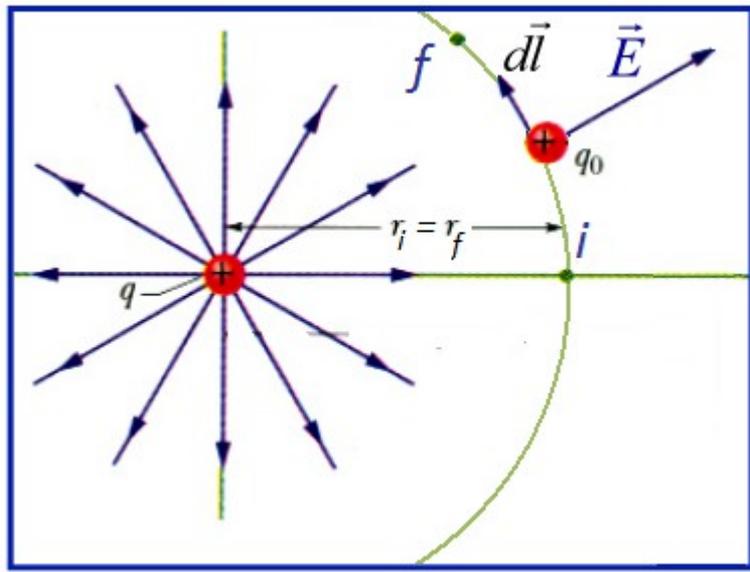
$$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



potencial no ponto P



Potencial devido a uma carga puntiforme



$$\Delta V = V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

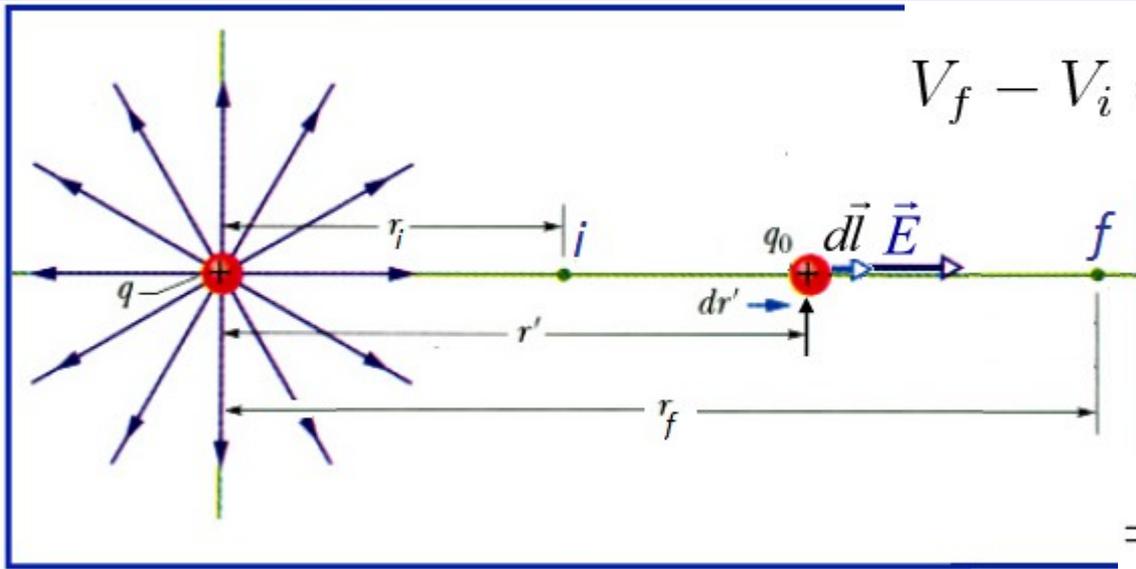
$$\Delta V = V_f - V_i = - \int_{r_i}^{r_f} E_r \cos\theta \, dl = 0$$

$\underbrace{\vec{E} \perp d\vec{l}}$

O trabalho realizado para deslocar uma carga em uma região onde o campo elétrico é constante é nulo, logo a variação de potencial entre quaisquer dois pontos nesta região também é nulo.



Potencial devido a uma carga puntiforme



$$V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_i}^{r_f} E_r dr$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \Rightarrow \text{Campo elétrico gerado por uma carga pontual}$$

$$\Rightarrow V_f - V_i = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2}$$

$$V_f - V_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

Potencial em um ponto qualquer do espaço

$$\begin{matrix} r_f \rightarrow r \\ r_i \rightarrow \infty \end{matrix}$$

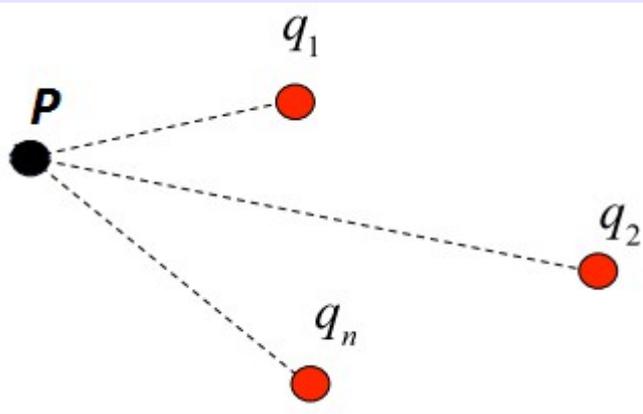
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$



É válida para qualquer distribuição esféricamente simétrica de carga



Potencial devido a um conjunto de cargas pontuais



O potencial no ponto P é a soma escalar do potencial gerado por cada carga no ponto P individualmente.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$$



Princípio de superposição

$$\Rightarrow V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

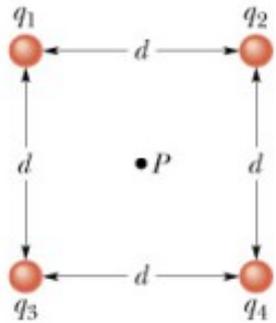
Procedimento para determinar V para um conjunto n de cargas

- I) Calcule V devido a cada carga i no ponto dado como se ela fosse a única carga presente.
- II) Somar escalarmente esses potenciais calculados em separado para determinar o potencial resultante V no ponto dado.

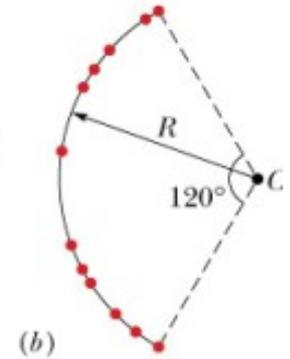
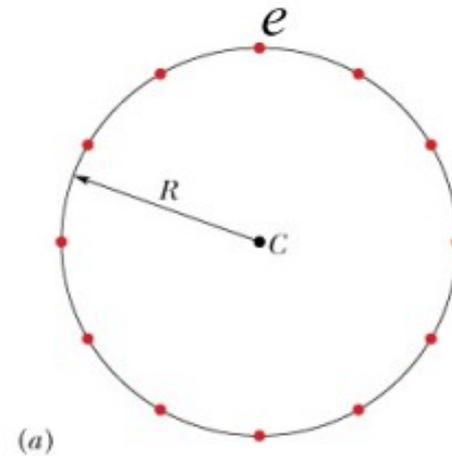
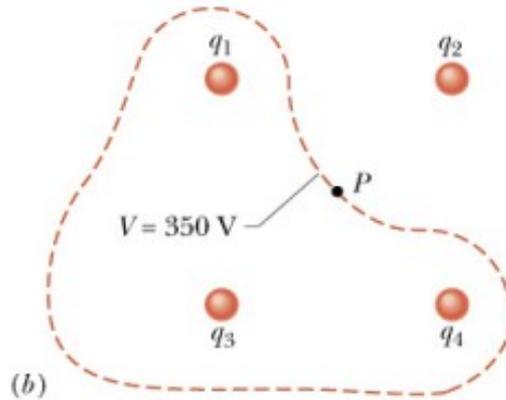


Potencial devido a um conjunto de cargas pontuais

Exemplos



$$d = 1,3\text{m}$$



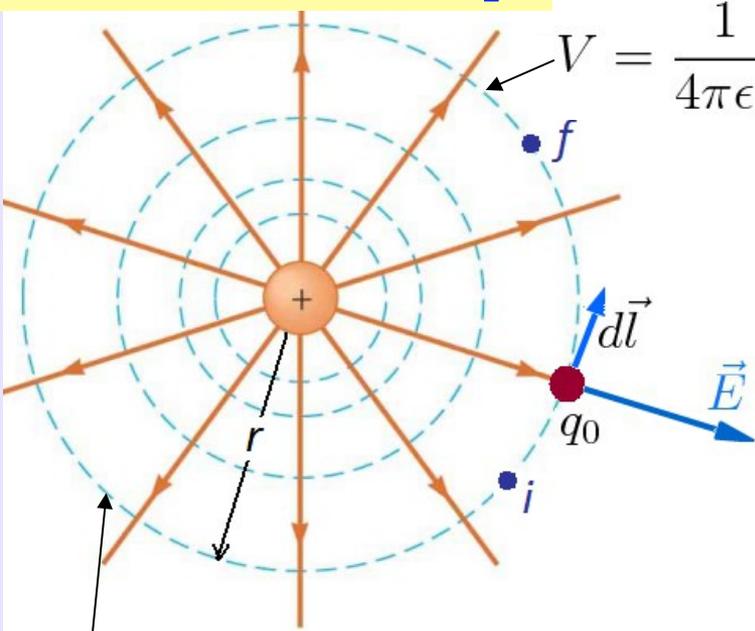
$$\begin{aligned} q_1 &= 12\text{ nC} \\ q_2 &= -24\text{ nC} \\ q_3 &= 31\text{ nC} \\ q_4 &= 17\text{ nC} \end{aligned} \quad V_P = ?$$

$$\begin{aligned} q &= -12 \times e \\ V_C &= \frac{-12e}{4\pi\epsilon_0 R} \\ \vec{E}_C &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= -12 \times e \\ V_C &= \frac{-12e}{4\pi\epsilon_0 R} \\ \vec{E}_C &\neq \vec{0} \end{aligned}$$



Superfície Equipotencial



Superfície equipotencial: uma superfície onde o potencial é constante, ou seja, tem o mesmo valor em todos os pontos.

↙ *Superfície Equipotencial*

$$V = C^{te} \Rightarrow U = C^{te} \Rightarrow \Delta U = 0$$

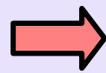
como $\Delta U = -W_{if} \Rightarrow W_{if} = 0$

↗ não realiza trabalho

$$\Rightarrow W_{if} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{r_i}^{r_f} F \cos\theta \, dl = 0$$

mas $d\vec{l} \neq 0$, $\vec{F} = q_0 \vec{E} \neq 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$

$\Rightarrow \theta = 90^\circ \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l}$

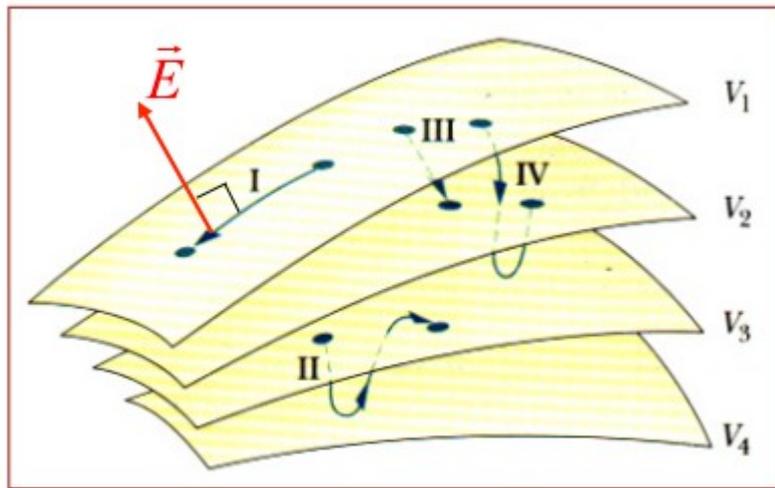


Logo, a superfície equipotencial é perpendicular as linhas do campo elétrico.

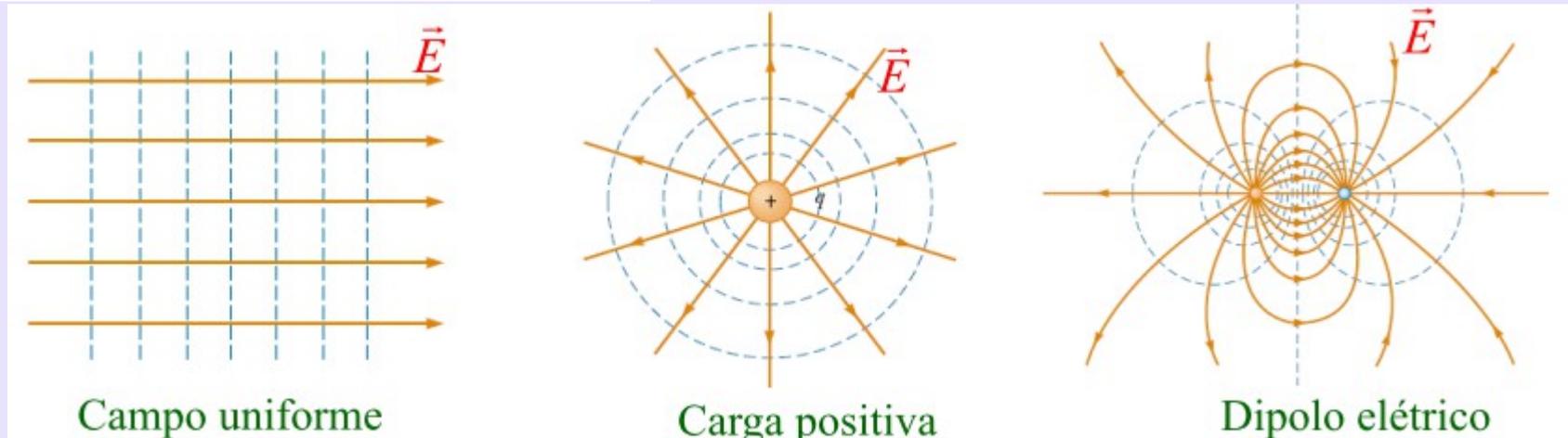
Superfície equipotencial = Superfície gaussiana



Superfície Equipotencial



Quanto vale W_I , W_{II} , W_{III} e W_{IV} ?



Note que o campo E é perpendicular as superfícies equipotenciais, logo não é necessário realizar trabalho para se deslocar uma carga sobre ela.

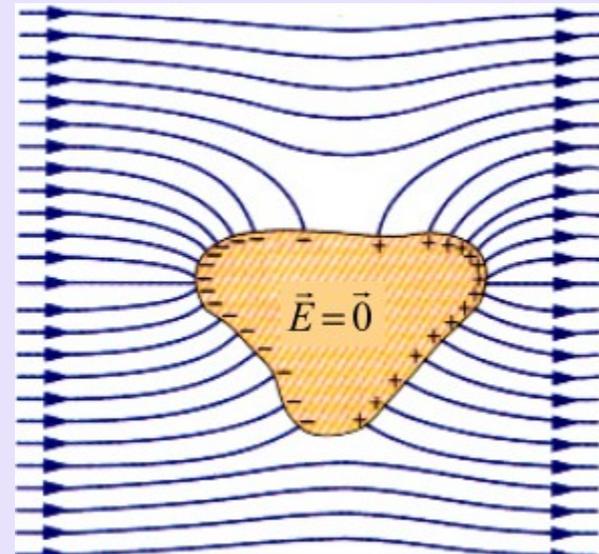
Potencial de um condutor isolado

Os pontos dentro e na superfície de um condutor qualquer estão ao mesmo potencial?

→ Sim, pois $E = 0$ dentro do condutor

Consequências para um condutor isolado, carregado ou não :

- O volume é equipotencial
- A superfície é uma equipotencial



Distribuição de carga em um condutor

Excluindo-se os condutores esféricos, a carga de um condutor não se distribui uniformemente sobre sua superfície, mas vai depender do raio de curvatura local.

Sejam duas esferas condutoras carregadas, ligadas por um fio condutor muito longo. Como estão ao mesmo potencial V :

$$V = k \frac{q_1}{R_1} = k \frac{q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (I)$$

Assim:

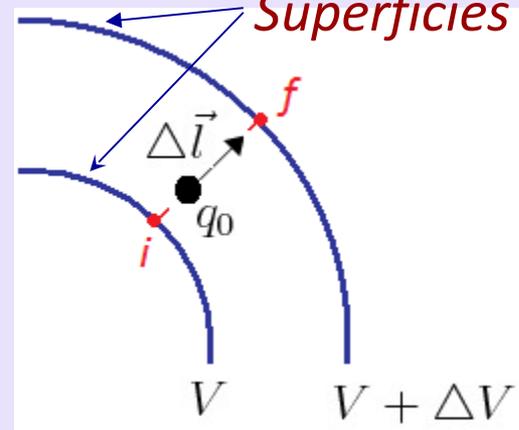
$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{q_1/4\pi R_1^2}{q_2/4\pi R_2^2} = \frac{q_1}{q_2} \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_1}{R_2} \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Então, η é inversamente proporcional ao raio de curvatura local. Em pontos onde o condutor é mais “pontagudo”, a densidade de cargas (e, portanto, o campo elétrico) é maior. Este campo pode ser suficiente para ionizar o ar em volta da ponta, tornando-o condutor e permitindo uma descarga (descarga corona).



Cálculo do campo a partir do potencial

Superfícies Equipotenciais



I) Variação da energia potencial entre *i* e *f*

$$\Delta U = q_0 \Delta V$$

II) Trabalho realizado para ir de *i* para *f*

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{l}, \quad \vec{F} = q_0 \vec{E}$$

$$\Rightarrow W = q_0 E \Delta l$$

como $W = -\Delta U$

$$q_0 E \Delta l = -q_0 \Delta V$$

$$\Rightarrow E = -\frac{\Delta V}{\Delta l}$$



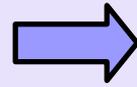
que dá a ligação entre o campo e o potencial elétrico



Cálculo do campo a partir do potencial

Se o deslocamento
for infinitesimal

$$\Rightarrow E = -\frac{dV}{dl}$$



A componente do campo elétrico em qualquer direção é o negativo da derivada do potencial com relação ao deslocamento naquela direção.

Supondo que: • $V = V(x, y, z)$

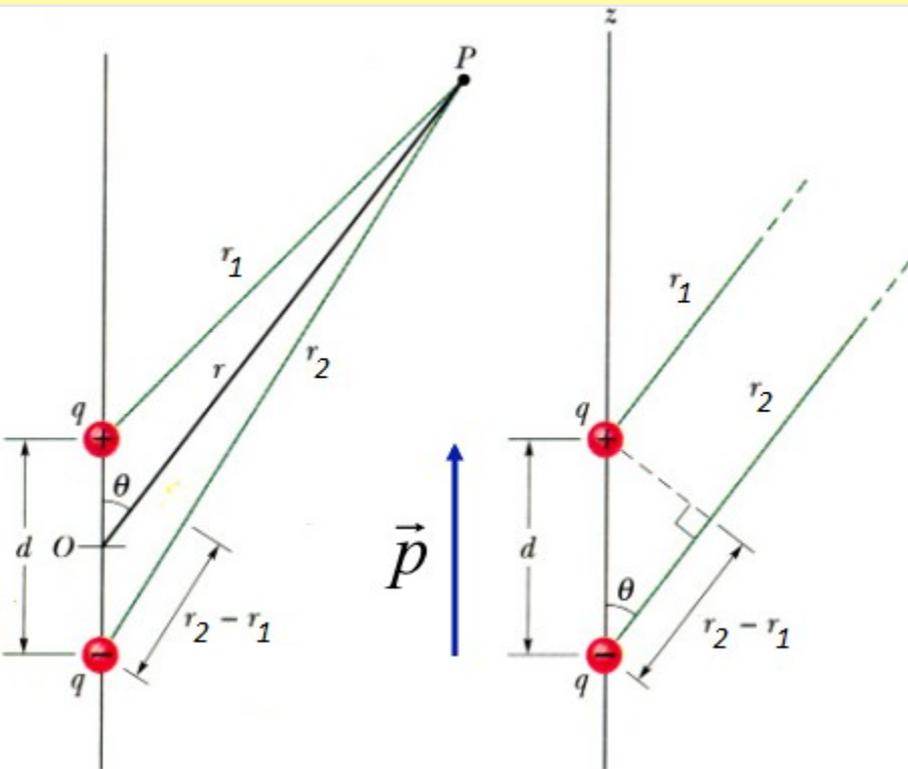
Então,
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad e \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$



Potencial produzido por um dipolo



$$V_P = \sum_i V_i = V_+ + V_-$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2}$$

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

$$\Rightarrow r_1 r_2 \approx r^2$$

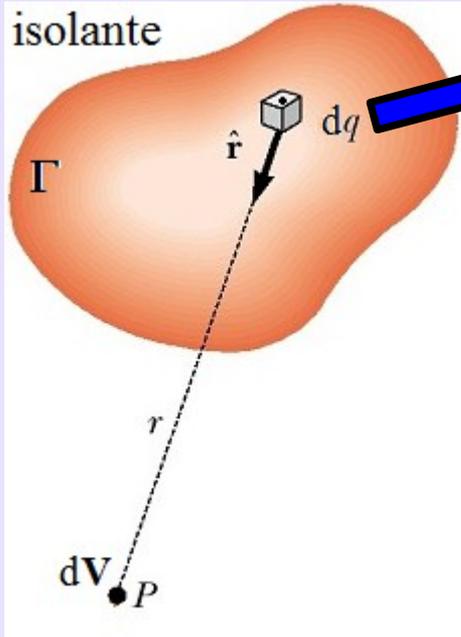
$r \gg d \Rightarrow$ a distância é muito maior que a separação entre as cargas

$$\Rightarrow \theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta \Rightarrow r_2 - r_1 \approx d \cos\theta$$

$$\Rightarrow V_P \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos\theta}{r^2} \Rightarrow V_P \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}, \quad p = qd \Rightarrow V \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$



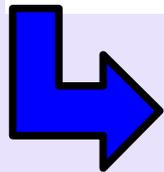
Potencial elétrico de distribuições contínuas de carga



$$dq = \rho dV$$

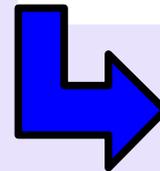
A ideia é dividir o sólido em pequenos diferenciais de carga dq , de forma que eles possam ser tratados como uma carga pontual. Pode-se então, calcular o potencial gerado por cada um destes dq 's no ponto P separadamente, e na sequência se aplica o princípio da superposição para obter o potencial elétrico que o sólido produz no ponto P .

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$



Potencial gerado no ponto P devido ao elemento de carga dq

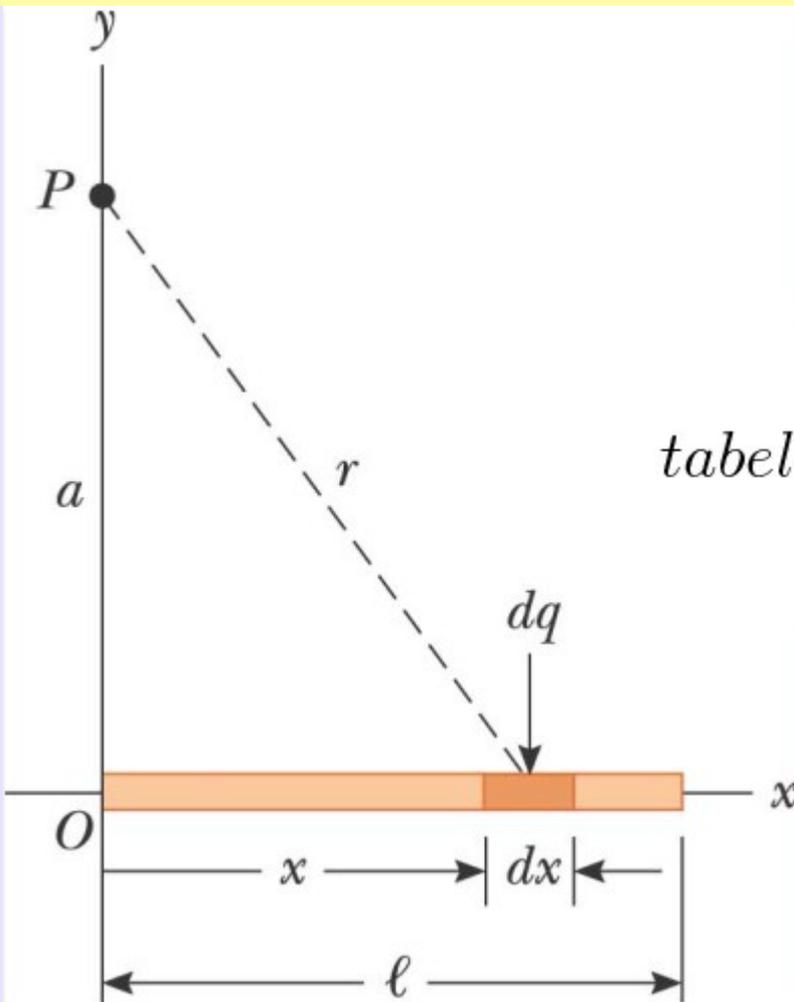
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dq}{r}$$



Potencial total no ponto P devido a presença do sólido carregado Γ



Potencial de uma linha finita de carga



$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \Rightarrow \begin{cases} dq = \lambda dx \\ r = \sqrt{x^2 + a^2} \end{cases}$$

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

tabela $\Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left(u + \sqrt{u^2 + a^2} \right)$

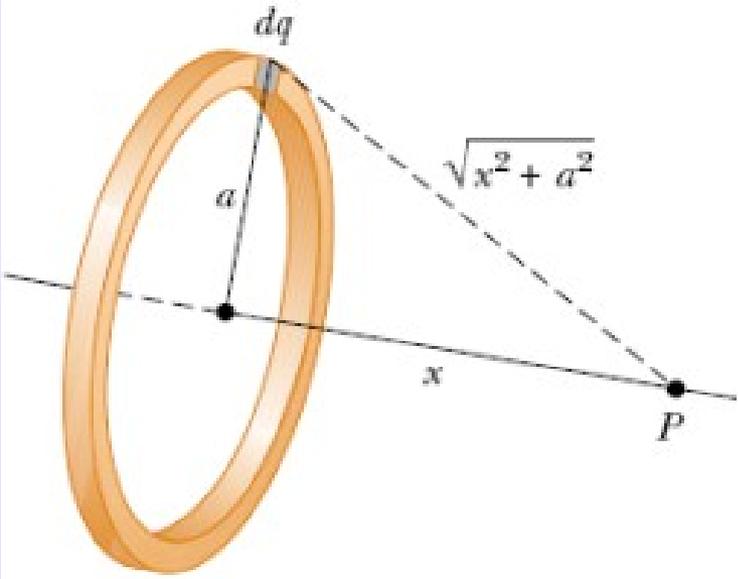
$$\Rightarrow V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[x + \sqrt{x^2 + a^2} \right]_0^l$$

$$\Rightarrow V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln \left(l + \sqrt{l^2 + a^2} \right) - \ln a \right]$$

$$\Rightarrow V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{l + \sqrt{l^2 + a^2}}{a} \right)$$



Potencial de um anel de carga



$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \Rightarrow \begin{cases} dq = \lambda ds = \lambda a d\phi \\ r = \sqrt{a^2 + x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a d\phi}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\lambda a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \Rightarrow V = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Qual é o potencial no centro do anel?

$$x = 0, \Rightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = a$$

$$\Rightarrow V = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \quad \text{ou} \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$



Potencial de um anel de carga

Qual é o campo elétrico sobre o eixo do anel?

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \quad \leftarrow \text{só tem componente na direção } x$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \frac{d}{dx} (a^2 + x^2)^{-1/2}$$

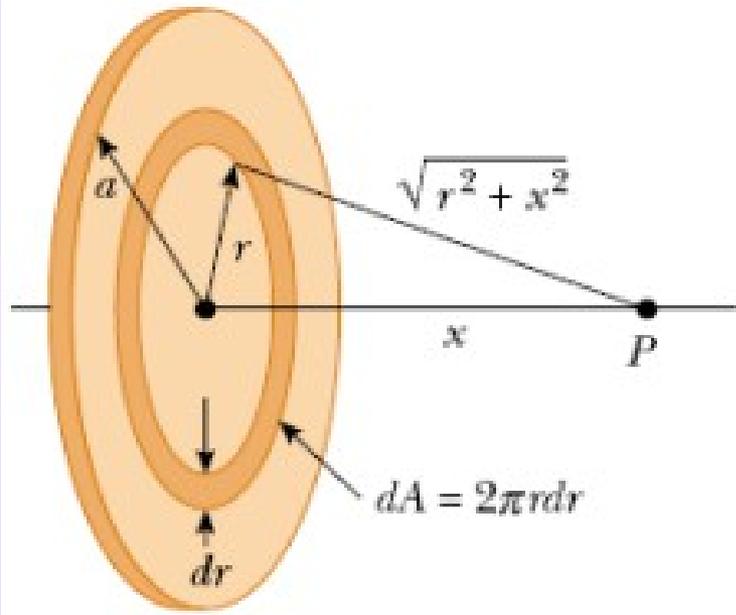
$$\Rightarrow E_x = -\frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{2} (a^2 + x^2)^{-3/2} 2x \right]$$

$$\Rightarrow E_x = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow E_x = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{ax}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$



Potencial de um disco carregado



$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R} \Rightarrow \begin{cases} dq = \eta dA = 2\pi\eta r dr \\ R = \sqrt{r^2 + x^2} \end{cases}$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\eta r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$dV = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$V = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$\int u^n du, \text{ com } u = \sqrt{r^2 + x^2} \text{ e } n = -\frac{1}{2}$$

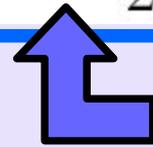
$$V = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{1}{2} (r^2 + x^2)^{-1/2} 2r dr$$



Potencial de um disco carregado

$$V = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{r^2 + x^2} \right]_0^a$$

$$V = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + x^2} - |x| \right)$$



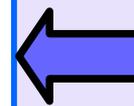
potencial sobre o eixo do disco

Campo elétrico sobre o eixo do disco

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow E_x = -\frac{\eta}{2\epsilon_0} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{a^2 + x^2} - |x| \right)$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{\eta}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} (a^2 + x^2)^{-1/2} 2x - \frac{x}{|x|} \right]$$

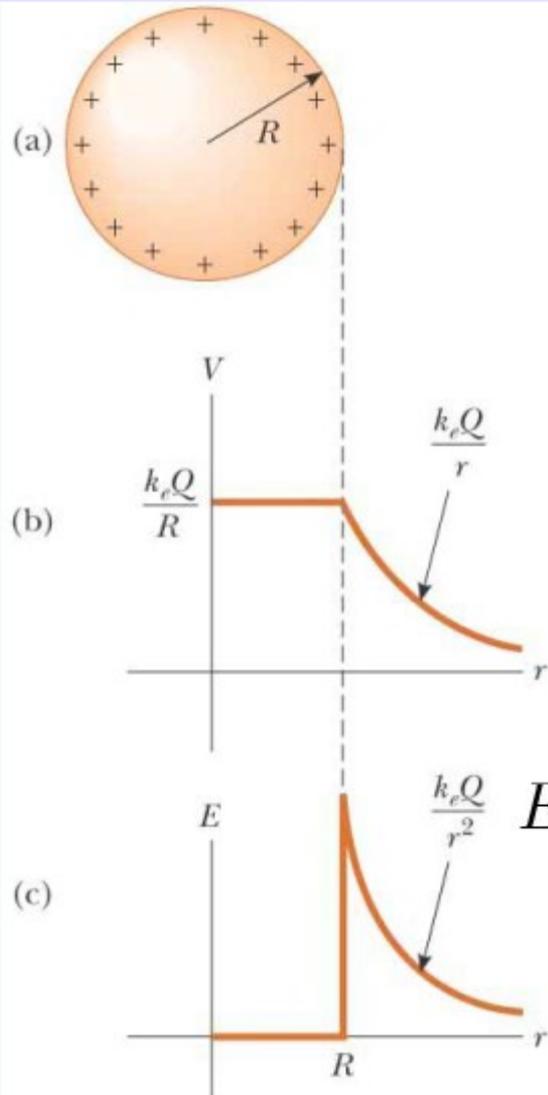
$$\Rightarrow E_x = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \left[\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right]$$



campo sobre o eixo do disco



Potencial de um condutor esférico



Fora do condutor

$$V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_i^f E_r dr$$

sendo $E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$, temos que :

$$V_f - V_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

com $V_i = V_\infty = 0 \Rightarrow V_f = V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$

Dentro do condutor

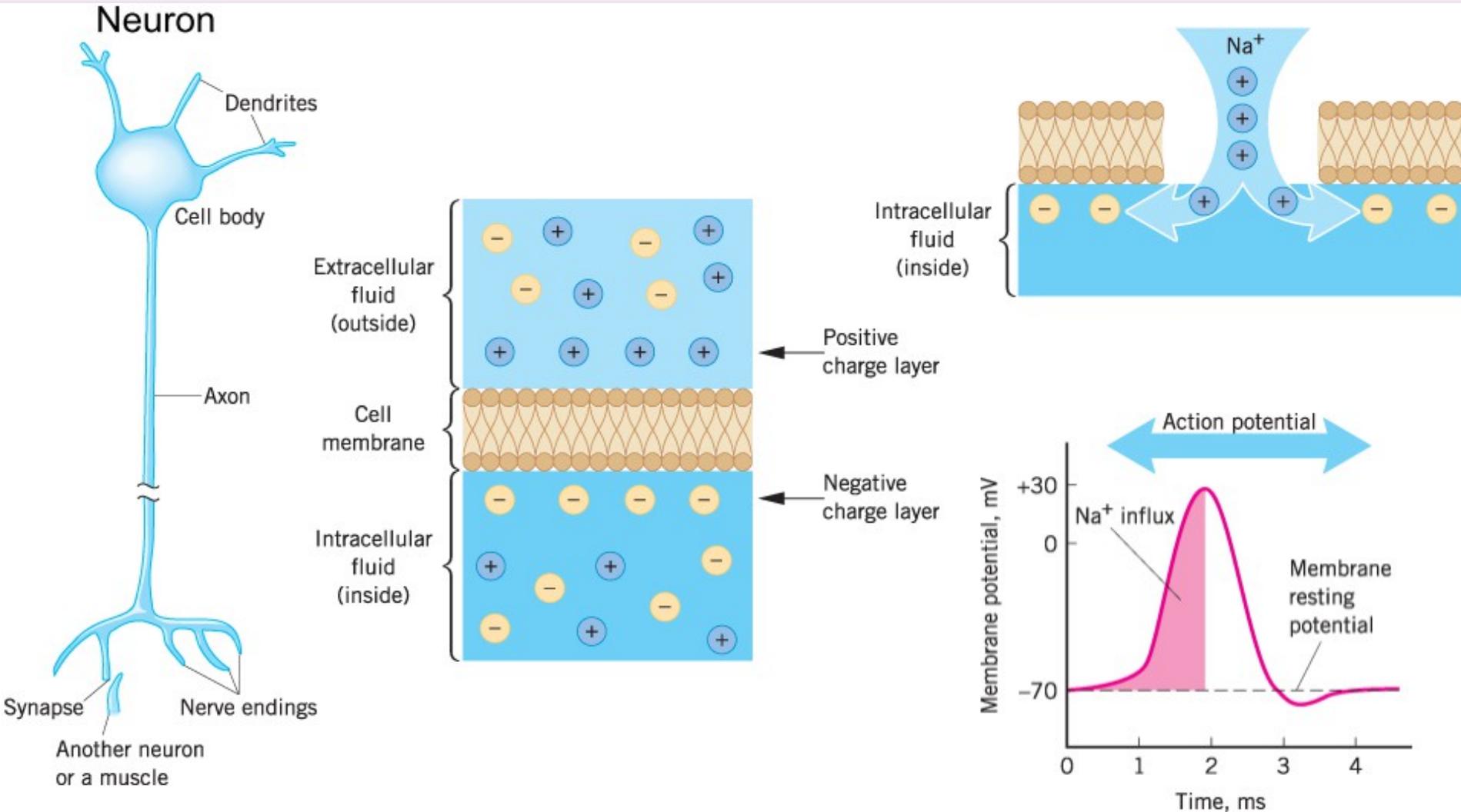
$E_r = 0 \Rightarrow V_f - V_i = C^{te}$, com $V_i = 0 \Rightarrow V_f = C^{te}$

sobre a esfera $\rightarrow V_{dentro} = V_{fora} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$

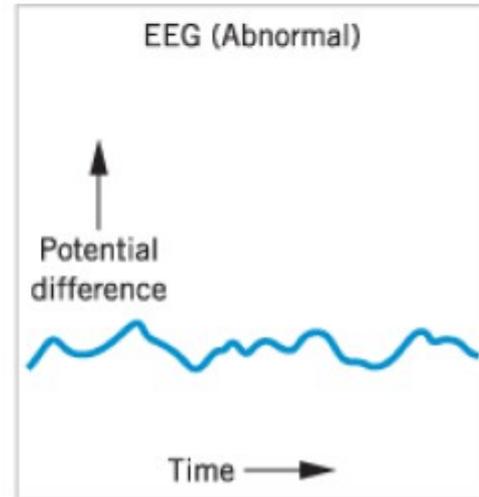
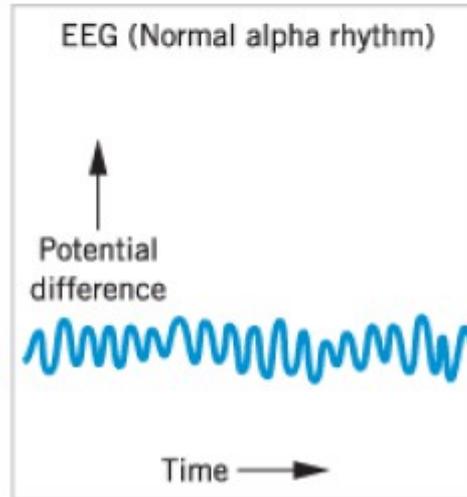
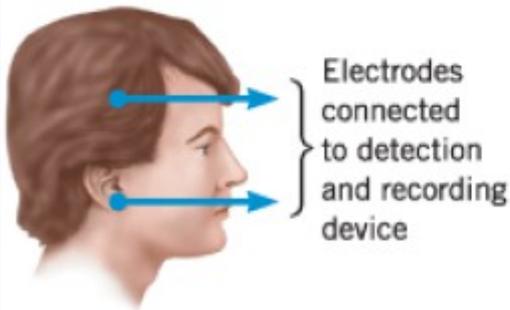
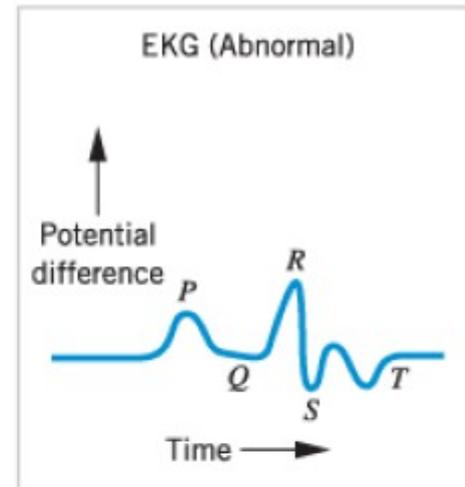
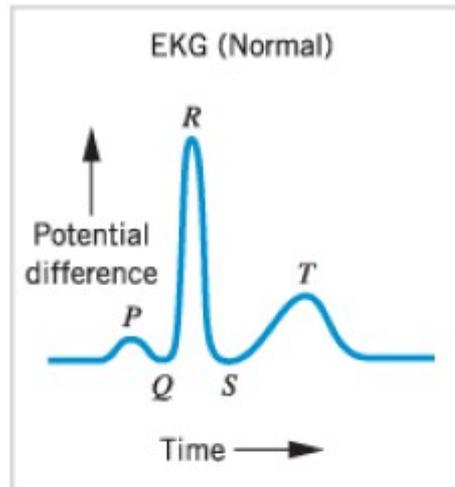
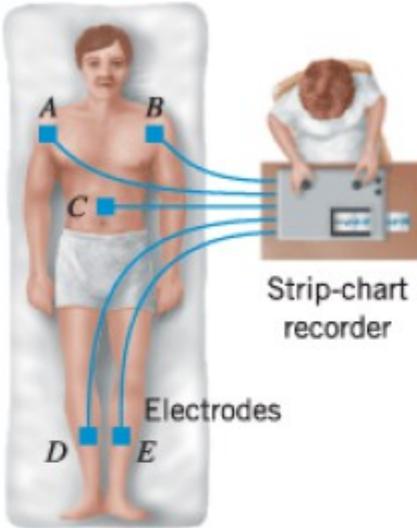
assim, $C^{te} = V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$



Aplicação Biomédica da diferença de potencial elétrico



Aplicação Biomédica da ddp



EKG → Eletrocardiograma

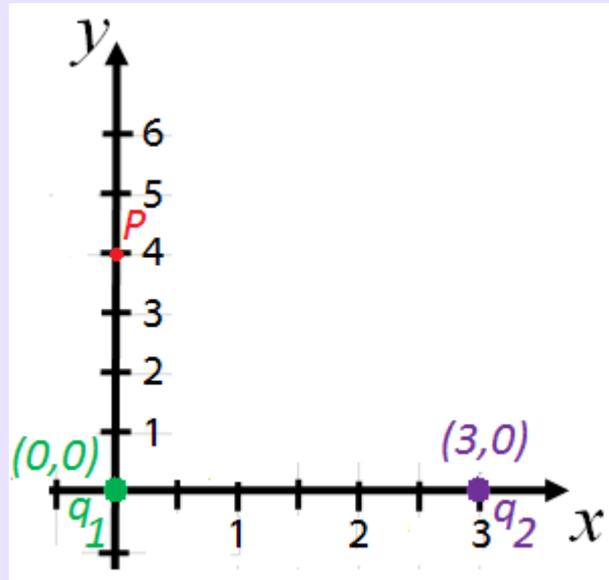
EEG → Electroencefalograma



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Exercício 01

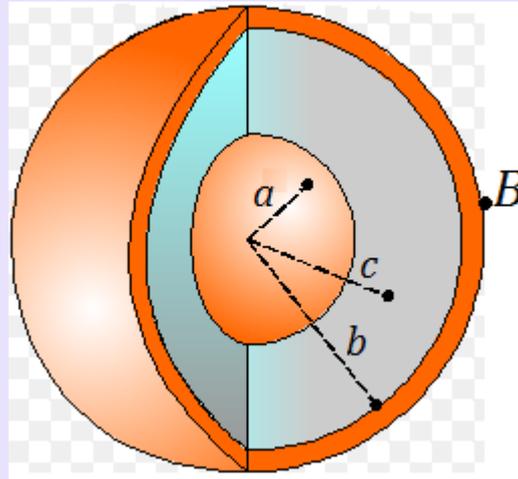
Uma carga puntiforme de $5\mu\text{C}$ está localizada na origem, e uma segunda carga puntiforme de $-2\mu\text{C}$ está sobre o eixo x , na posição $(3,0)\text{m}$, como mostra a figura:



- a)** Se o potencial for nulo no infinito, achar o potencial elétrico total devido às cargas, no ponto P , cujas coordenadas são $(0,4)\text{m}$.
- b)** Qual é o trabalho necessário para trazer uma terceira carga puntiforme, q_0 , de $4\mu\text{C}$, do infinito até o ponto P ?

Exercício 02

Uma esfera condutora, maciça, de raio a , está colocada concentricamente no interior de uma casca esférica fina de raio b . Carrega-se a esfera com carga q e a casca com $-q$.



- Calcule o potencial elétrico na casca, referenciando o infinito com o potencial nulo.
- Calcule o potencial elétrico na superfície da esfera, referenciando o infinito com o potencial nulo.
- Calcule o trabalho necessário para trazer uma carga Q do ponto B , sobre a casca, até o ponto C , a uma distância c do centro da esfera, onde $a < c < b$.



FIM

